LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES
2020

BRANCHE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE	
Mathématiques II	**B**	*Durée de l'épreuve :*	*260 min*
		Date de l'épreuve :	*15/09/2020*

Numéro du candidat :________________________

Instructions

- L'élève répond à toutes les questions de la partie obligatoire.
- L'élève répond à exactement une question de la partie au choix. Il indique obligatoirement son choix en marquant d'une croix la case appropriée ci-dessous.

Seules les réponses correspondant à la question choisie par l'élève seront évaluées. Toute réponse à une question non choisie par l'élève est cotée à 0 point. En l'absence de choix clairement renseigné sur la page de garde la partie au choix est cotée à 0 point.

Partie obligatoire (48 points)

1) Question 1 .... 20 points
2) Question 2 .... 12 points
3) Question 3 .... 6 points
4) Question 4 .... 10 points

Partie au choix (12 points)

☐ Question 5 : Calcul intégral .... 12 points
☐ Question 6 : Calcul d'aire .... 12 points
☐ Question 7 : Fonction avec paramètre .... 12 points

Partie obligatoire (48 points)

Question 1

On donne la fonction f définie par

$$f(x) = -3 + \frac{2-x}{2} \cdot e^{\left(\frac{-2}{x+2}\right)}$$

Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

a) Déterminer les domaines de définition et de continuité de f.

b) Étudier le comportement asymptotique de f.

c) Calculer la dérivée de f et étudier son signe. Établir le tableau des variations de f.

d) Calculer la dérivée seconde de f et étudier son signe. Établir le tableau de concavité de f et calculer les coordonnées des points d'inflexion éventuels.

e) Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé d'unité 1 cm. Dessiner les asymptotes éventuelles.

f) Vérifier s'il existe des tangentes à $\mathcal{C}_f$ qui passent par le point $P(-7\,;-3)$. Le cas échéant, ajouter les tangentes au graphique précédent et donner une équation cartésienne de chacune d'elles.

(0,5+5,5+3+4,5+2,5+4)   20 points

Question 2

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$1 + x + \log_4 (2^x + 1)^2 \leq \log_{\sqrt{2}} \sqrt{3 - 2^x} - \log_2 3$$

b) On donne la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x} + 1 + \ln(x^2 + 1) & \text{si } x \leq 0 \\ x^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

i) Déterminer le domaine de définition de f. Étudier la continuité de f en 0 et donner le domaine de continuité de f.

ii) Étudier la dérivabilité de f en 0. Donner le domaine de dérivabilité de f, la dérivée de f et une interprétation graphique du point d'abscisse 0 de la courbe de f.

c) Calculer la limite suivante : $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[\cos\left(e^x\right)\right]^{e^{-x}}$

(5+(2,5+2,5)+2)   12 points

Question 3

a) Calculer les réels a, b et c pour que l'égalité suivante soit vérifiée pour tout réel x qui n'annule pas les dénominateurs :

$$\frac{3x+2}{(x+3)(x^2-3x+3)}=\frac{a}{x+3}+\frac{bx+c}{x^2-3x+3}$$

b) Calculer $\displaystyle\int \frac{3x+2}{(x+3)(x^2-3x+3)}\,dx$ sur un intervalle I de $]-\infty\,;-3[$.

(2+4) 6 points

Question 4

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int \frac{1+\tan^2 x}{(1+\tan x)^4}dx$

b) $\displaystyle\int_2^3 x^2(3-x)^5 dx$

c) $\displaystyle\int \sin 3x \cdot \cos^4 2x\, dx$ (Indication: Linéariser)

d) $\displaystyle\int_{-\ln 2}^{0} e^x \cdot \operatorname{Arccos}(1-e^x)dx$

(1+2+4+3) 10 points

Partie au choix (12 points)

Question 5

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^3} dx$

b) i) Calculer les réels a et b pour que l'égalité suivante soit vérifiée pour tout réel x qui n'annule pas les dénominateurs :

$$\frac{13}{6x^2+5x-6} = \frac{a}{2x+3} + \frac{b}{3x-2}$$

ii) Calculer: $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{13}{5\sin x - 12\cos x} dx$

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot e^{3x} dx$

(2+(1,5+3,5)+5)   12 points

Question 6

a) Dans un repère orthonormé du plan on note C_f la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = x \cdot e^{\text{Arcsin}\, x}$. Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe C_f et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$.

b) Dans un repère orthonormé du plan on note :

- C_f, la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 1$.
- C, le cercle d'équation $x^2 + (y-1)^2 = 8$.

Calculer l'aire de la partie du plan qui est délimitée par C_f et le cercle C et qui contient l'origine.

(5+7)   12 points

Question 7

Soit f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_m(x) = x + \ln\left|x^2 - m\right| \quad , \quad \text{avec } m \in \left]-\infty\,;0\right].$$

et soit C_{f_m} sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

a) Déterminer, en fonction de m, le domaine de définition de f_m.

b) Calculer les limites de f_m aux bornes du domaine de définition.

c) Discuter, en fonction de m, les variations de f_m (On ne demande pas les valeurs des extrema éventuels !).

(1+3,5+7,5)   12 points